

RELAZIONE DI FINE TIROCINIO

**Studio di modelli ridotti, a un numero discreto di gradi di libertà, di travi non lineari soggette a carichi dinamici tramite l'uso (Symbolic Computation) del software Wolfram Mathematica**

Studente:  
**Mauro Murer**  
Matricola 465481

Tutor:  
**Prof. Giovanni Formica**

## Sommario

La seguente relazione descrive le attività svolte ai fini dello svolgimento della tesi di laurea, con particolare riferimento all'acquisizione di ulteriori conoscenze informatiche nel campo della meccanica computazionale. Tali attività sono previste dall'art. 10, co. 5 let. d/e e considerate equivalenti al tirocinio; lo svolgimento delle attività di seguito illustrate corrisponde al riconoscimento di 6 CFU per un numero di ore complessivo pari a 150. Le attività si sono svolte nel periodo 15/12/2016 - 15/02/2017 presso il Laboratorio di Modellazione e Simulazione (Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi di Roma Tre).

L'obiettivo è consistito nell'approfondire le conoscenze relative all'applicazione del software Wolfram Mathematica per lo studio di modelli ridotti, a un numero discreto di gradi di libertà, di travi non lineari soggette a carichi dinamici.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modello aeroelastico</b>	<b>5</b>
2.1	Il Runyang Bridge . . . . .	5
2.2	Equazioni del moto . . . . .	6
2.3	Carichi aerodinamici . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Costruzione del modello di ponte sospeso soggetto a flutter tramite Wolfram Mathematica</b>	<b>9</b>
3.1	Risposta statica . . . . .	12
3.2	Risposta dinamica . . . . .	16
3.2.1	Impostazione del problema dinamico . . . . .	16
3.2.2	Costruzione del sistema dinamico . . . . .	16
3.3	Modi di vibrazione del ponte sospeso . . . . .	22
3.4	Risoluzione del problema statico e dinamico . . . . .	25
3.5	Metodi di risoluzione approssimati . . . . .	28
3.5.1	Metodo di Galerkin . . . . .	28
3.5.2	Metodo di integrazione di Cavalieri-Simpson . . . . .	30
3.5.3	Metodo di Runge-Kutta . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>32</b>

# Elenco delle figure

1.1	Geometria di un ponte sospeso . . . . .	3
2.1	Configurazione di riferimento . . . . .	5
2.2	Sezione trasversale soggetta ai carichi aerodinamici . . . . .	7
2.3	Coefficienti aerodinamici di drag, lift e momento aerodinamico relativi all'impalcato del Runyang Bridge . . . . .	8
3.1	Andamento della posizione dei cavi sospesi lungo la coordinata spaziale . .	11
3.2	Andamento delle derivate flutter in funzione dell'angolo di attacco . . . . .	14
3.3	Configurazione iniziale del ponte . . . . .	19
3.4	Modi di vibrare del ponte nei due gradi di libertà, spostamento verticale e rotazione dell'impalcato . . . . .	25
3.5	L'andamento delle deformate del ponte, nei gradi di libertà considerati, calcolati per una velocità del vento pari a 60 $m/s$ ed angolo di attacco pari a zero . . . . .	26
3.6	L'andamento delle oscillazioni del ponte nel tempo adimensionalizzato . . .	27
3.7	L'andamento della configurazione del ponte sospeso nel tempo adimensionalizzato attraverso il comando <i>Animate</i> . . . . .	27
3.8	Trave inflessa . . . . .	28

# Capitolo 1

## Introduzione

Cavi, travi ed archi sono elementi snelli utilizzati per costruire strutture molto complesse. La disposizione di questi elementi nelle strutture deve essere tale da massimizzare la capacità complessiva di resistere ai carichi permanenti e variabili. E' ben noto che una trave a campata singola soggetta a carichi uniformemente distribuiti esibisce un momento flettente proporzionale al quadrato della lunghezza della trave stessa. Perciò, nel momento in cui si cerca di raggiungere lunghezze maggiori per la campata, questa subirà forti sollecitazioni flettenti, e a sua volta, richiede una sezione trasversale sufficientemente spessa per resistere anche solo ai carichi permanenti. D'altra parte, se sono disponibili materiali eccezionalmente resistenti (sia in trazione che in compressione), la preoccupazione ricadrebbe per l'elevata snellezza di questi elementi che li rende inclini alle vibrazioni e instabilità indotte dal vento come divergenza torsionale, flutter e galloping. Questi stati limite possono causare danni catastrofici come dimostrano le esperienze del passato (ad esempio, il crollo del Tacoma Narrows Bridge).

Una soluzione strutturale ottimale per una struttura a campata lunga è la combinazione di cavi e travi. In particolare, una struttura supportata da cavi è assemblata attraverso dei sistemi di cavi appesi (in diverse configurazioni) a delle torri massicce e lasciando che questi supportino l'impalcato, come è per il caso di ponti sospesi (vedi Figura 1.1). La capacità portante della funicolare di cavi è quindi combinata con la capacità flessionale del sistema che caratterizza la campata del ponte. Tra le diverse applicazioni, vale la pena menzionare, in particolare, ponti supportati da cavi con campate da 200 a 2000 m (e non solo), alberi strallati superiori a 600 m ed enormi coperture anch'esse sorrette da cavi (ad esempio, coperture aeroportuali).

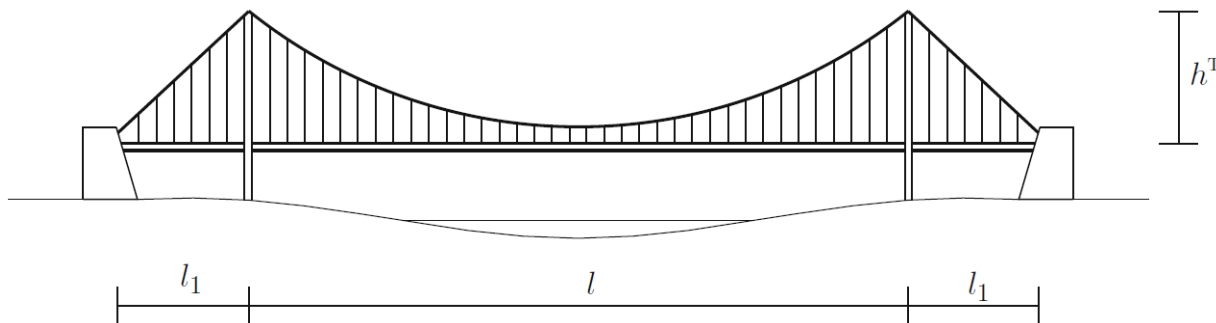


Figura 1.1: Geometria di un ponte sospeso

I ponti supportati da cavi sono costituiti da tre elementi principali: (a) il sistema di travi che costituisce l'impalcato; (b) il sistema di cavi che sostengono l'impalcato; e (c) le torri (o tralicci) di supporto ai cavi. Nei ponti sospesi i cavi ancorati alle due torri sono collegati all'impalcato tramite numerosi cavi tesi ravvicinati conosciuti come pendini. Un'altra parte strutturale importante è rappresentata dai vincoli dei cavi sotto forma di blocchi di ancoraggio che uniscono i cavi sospesi alle torri, poste ai due estremi della campata unica.

# Capitolo 2

## Modello aeroelastico

### 2.1 Il Runyang Bridge

Il Runyang Bridge è stato assunto come caso di studio per il comportamento dinamico non lineare di ponti sospesi soggetti a flutter.

Al suo completamento nel 2005, il Runyang Suspension Bridge, con la sua campata principale di lunghezza pari a 1490 m sopra il fiume Yangtze, è diventato il quarto più lungo ponte sospeso del mondo e il più lungo della Cina. La campata principale del ponte è costituita da una trave reticolare in acciaio di altezza pari a 3 m e di larghezza pari a 35.9 m.

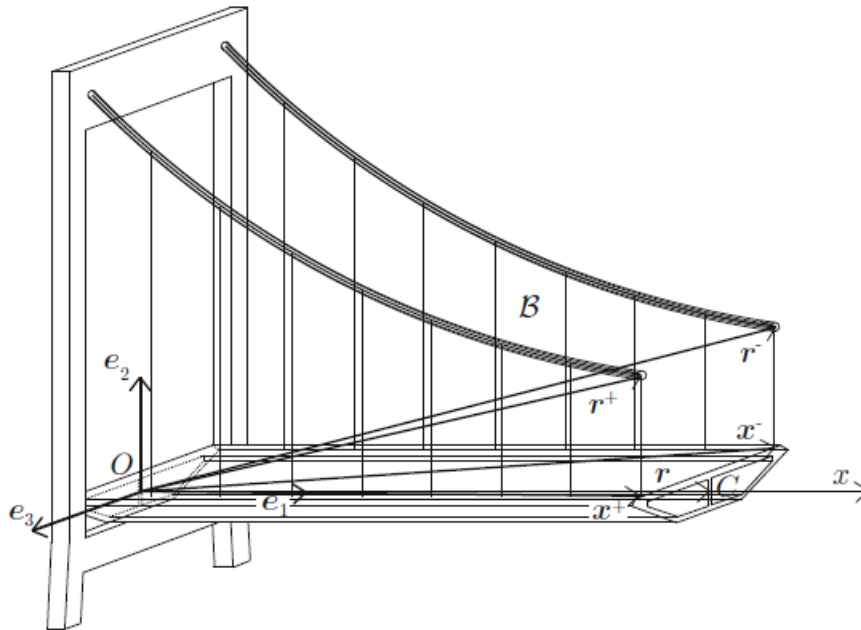


Figura 2.1: Configurazione di riferimento

Di seguito vengono elencate le caratteristiche geometriche ed elastiche che descrivono compiutamente la struttura sospesa:  $l = 1490 \text{ m}$ ,  $B = 35.9 \text{ m}$ ,  $D = 3 \text{ m}$ ,  $A^d = 1.2481 \text{ m}^2$ ,  $\rho A^d = 18387 \text{ kg/m}$ ,  $\rho J_3^E = 1.852 \cdot 10^6 \text{ kg m}^2/\text{m}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $G = 80.77 \text{ GPa}$ ,  $J_1 = 1.9842 \text{ m}^4$ ,  $J_2 = 137.754 \text{ m}^4$ ,  $J_3 = 5.034 \text{ m}^4$ .

I cavi sospesi, invece, esibiscono le seguenti proprietà:  $E^c = 200 \text{ GPa}$ ,  $d^c = 0.776 \text{ m}$ ,  $A^c = 0.47347 \text{ m}^2$ ,  $\rho A^c = 3817 \text{ kg/m}$ . L'abbassamento dei cavi sotto il loro peso è pari a  $149 \text{ m}$  e la forza orizzontale è  $H^c = 7.096 \cdot 10^7 \text{ N}$ . I pendini sono caratterizzati da:

$E^h = 210 \text{ GPa}$ ,  $d^h = 0.0522 \text{ m}$ ,  $A^h = 2.14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , e la distanza tra questi è pari a  $B^c = 34.3 \text{ m}$ . L'altezza delle torri è  $h = 154 \text{ m}$ . Il fattore di smorzamento è pari al 0.5%.

## 2.2 Equazioni del moto

La configurazione di riferimento del ponte è mostrata in Figura 2.1, dove la base ortogonale fissata ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) ha origine nel centro elastico di inizio campata. La direzione  $\mathbf{e}_1$  è collineare con la campata del ponte, quindi il piano  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  rappresenta il piano della sezione trasversale (vedi Figura 2.1). In accordo con la convenzione adottata,  $u_2(x, t)$  denota lo spostamento verticale dell'impalcato mentre  $\phi_1(x, t)$  è la rotazione torsionale.

Per adimensionalizzare il problema nel tempo e nello spazio, vengono adottati, rispettivamente, la frequenza circolare  $\bar{\omega} = \sqrt{k_d/(m_d l^4)}$  e la lunghezza della campata  $l$ , dove  $k_d$  rappresenta la rigidezza flessione rispetto ad  $\mathbf{e}_3$ .

La configurazione dei cavi è descritta dall'equazione della catenaria  $y_c(x)$  che è funzione della massa  $m_0 = (m_c + m_d/2)$ , con  $m_c$  che indica la massa dei cavi ed  $m_d$  quella dell'impalcato. La lunghezza dei cavi viene calcolata come  $L_c = l \int_0^1 \sqrt{1 + y_c'^2} dx$  e il suo rapporto rispetto alla campata del ponte è  $L_c/l = \eta_c$ . La distanza  $B_c$  tra il due cavi sospesi e lo spessore dell'impalcato  $B$  vengono adimensionalizzate rispetto ad  $l$ , quindi  $\bar{b}_c = B_c/l$  e  $\bar{b} = B/l$ ; anche le inerzie  $\bar{m}_d = (m_d + 2m_c)$  e  $\bar{J}_m = \left( J_d^m + \frac{b_c^2}{2} m_c \right) / (m_d l^2)$  vengono adimensionalizzate. Inoltre vengono introdotte i seguenti rapporti di rigidezza:  $\kappa_c = E_c A_c l^2 / k_d$ ,  $\alpha_c = H_c l^2 / k_d$ ,  $\beta = k_\phi / k_d$ ,  $\chi = k_3 / k_d$ , dove  $k_3$  è la rigidezza flessionale e  $k_\phi$  è la rigidezza torsionale dell'impalcato.

Le equazioni del moto adimensionalizzate vengono date quindi nella seguente forma

$$\begin{aligned} \bar{J}_m \ddot{\phi}_1 + \bar{c}_1 \dot{\phi}_1 - \beta \phi_1'' - \frac{\bar{b}_c^2}{2} \alpha_c \phi_1'' - \frac{\bar{b}_c^2}{2} \kappa_c y_c'' \frac{1}{\eta_c} \int_0^1 y_c' \phi_1 d\bar{x} - \lambda_1 &= 0 \\ \bar{m}_d \ddot{u}_2 + \bar{c}_2 \dot{u}_2 + u_2'''' - 2\alpha_c u_2'' - 2\kappa_c y_c'' \frac{1}{\eta_c} \int_0^1 y_c' u_2' d\bar{x} - \lambda_2 &= 0 \\ \ddot{u}_3 + \bar{c}_3 \dot{u}_3 + \chi u_3'''' - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $\bar{x} = x/l$  è la coordinata spaziale adimensionalizzata,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  rappresentano le forzanti esterne dipendenti da spazio e tempo. Vengono introdotti anche i parametri relativi allo smorzamento strutturale come classici termini viscosi proporzionali alla velocità. Ne derivano i seguenti rapporti adimensionali di smorzamento:  $\bar{c}_1 = 2\xi \bar{\omega} m \bar{\omega} g_{a_1}$ ,  $\bar{c}_2 = 2\xi \bar{m}_d \bar{\omega} m \bar{\omega} g_{a_2}$  e  $\bar{c}_3 = 2\xi \bar{J}_m \bar{\omega} m \bar{\omega} g_{a_3}$ . il fattore di smorzamento è  $\xi = 0.5$ , mentre  $\bar{\omega} m \bar{\omega} g_{a_1}$ ,  $\bar{\omega} m \bar{\omega} g_{a_2}$  e  $\bar{\omega} m \bar{\omega} g_{a_3}$  sono le frequenze adimensionalizzate più basse relative ai modi di vibrare della strutture nei tre gradi di libertà.

## 2.3 Carichi aerodinamici

I carichi aerodinamici, ottenuti dalla formulazione non lineare quasi stazionaria, permettono al sistema che governa il moto della struttura di essere integrato nel dominio del tempo. i carichi aerodinamici vengono rappresentati dalle due forzanti  $\bar{F}_1(\bar{x}, t)$  e  $\bar{F}_2(\bar{x}, t)$  e il momento  $\bar{M}(\bar{x}, t)$ , rispettivamente espresse secondo la base fissata ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) come

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(\bar{x}, t) &= \bar{L}(\bar{x}, t) \sin(\alpha_w) - \bar{D}(\bar{x}, t) \cos(\alpha_w) \\ \bar{F}_2(\bar{x}, t) &= \bar{L}(\bar{x}, t) \cos(\alpha_w) - \bar{D}(\bar{x}, t) \sin(\alpha_w) \end{aligned} \quad (2.2)$$



Qui  $\bar{F}_1(\bar{x}, t)$  è la proiezione lungo  $\mathbf{e}_3$  delle forzanti adimensionalizzate di lift  $\bar{L}(\bar{x}, t)$  e drag  $\bar{D}(\bar{x}, t)$ , mentre  $\bar{F}_2(\bar{x}, t)$  è la proiezione lungo  $\mathbf{e}_2$ .

Assumendo un angolo di attacco iniziale del vento pari a zero, le forzanti aerodinamiche dipendono dall'angolo di attacco effettivo  $\alpha_E$  espresso come

$$\begin{aligned}\alpha_E(\bar{x}, t) &= \phi_1(\bar{x}, t) + \alpha_w(\bar{x}, t) \\ \alpha_w(\bar{x}, t) &= \frac{\dot{u}_2(\bar{x}, t) + \frac{\bar{b}}{4}\dot{\phi}_1(\bar{x}, t)}{\bar{U} + \dot{u}_3(\bar{x}, t)}\end{aligned}\quad (2.3)$$

dove  $\bar{U}$  è la velocità del vento adimensionale definita come  $\bar{U} = U_w/(l\bar{\omega})$  e  $\dot{u}_3(\bar{x}, t)$  può essere trascurato.

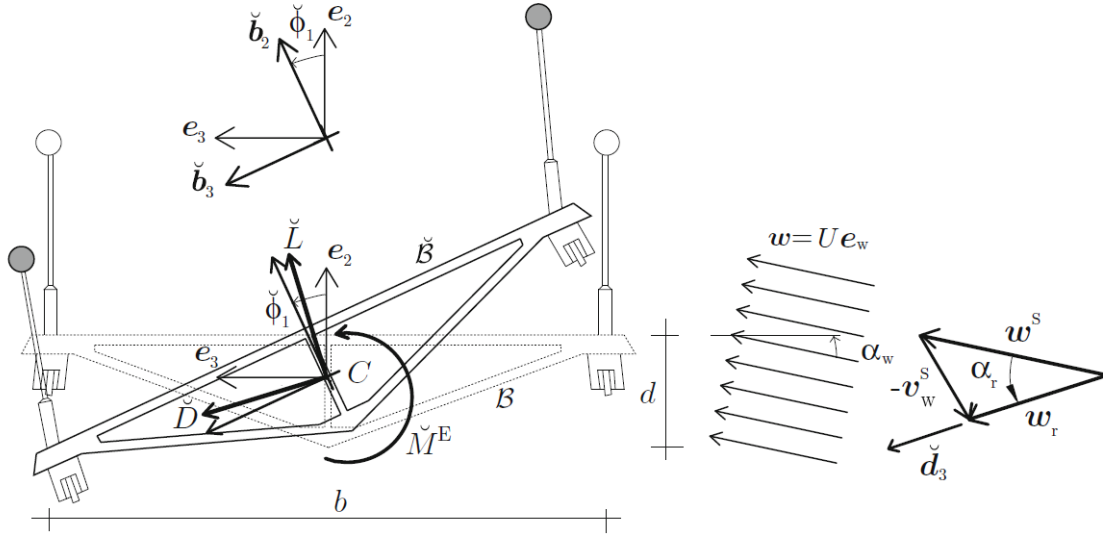


Figura 2.2: Sezione trasversale soggetta ai carichi aerodinamici

La funzione  $\alpha_w(\bar{x}, t)$  nell'equazione 2.3 rappresenta l'angolo istantaneo tra la direzione della velocità di flusso libero  $U_w$  e la velocità relativa del ponte rispetto al flusso (vedi Figura 2.2).

Quindi, le espressioni non lineari dei carichi aerodinamici sono:

$$\begin{aligned}\bar{D}(\bar{x}, t) &= P \bar{b} C_D(\alpha_e) \\ \bar{L}(\bar{x}, t) &= P \bar{b} C_L(\alpha_e) \\ \bar{M}(\bar{x}, t) &= P \bar{b}^2 C_M(\alpha_e)\end{aligned}\quad (2.4)$$

dove  $P = \frac{1}{2} \frac{\rho}{m_d} \frac{U^2}{\bar{\omega}^2}$  è la pressione adimensionale dinamica e  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$  è la densità dell'aria.

La forma non lineare dei coefficienti aerodinamici statici è espressa come

$$\begin{aligned}C_D(\alpha_E) &= 0.0695 + 0.1332\alpha_E + 4.7033\alpha_E^2 - 1.1667\alpha_E^3 - 24.1297\alpha_E^4 \\ C_L(\alpha_E) &= 0.0496 + 6.3567\alpha_E - 2.5893\alpha_E^2 - 109.3908\alpha_E^3 - 2.6756\alpha_E^4 + 786.1796\alpha_E^5 \\ C_M(\alpha_E) &= 0.0330 + 1.1379\alpha_E - 0.7673\alpha_E^2 - 27.0033\alpha_E^3 + 4.5606\alpha_E^4 + 249.0324\alpha_E^5\end{aligned}\quad (2.5)$$

I coefficienti aerostatici associati al lift, drag e momento aerodinamico (Figura 2.3) esibiscono un comportamento non lineare per angoli di attacco moderatamente grandi. La migliore espressione polinomiale dei coefficienti include termini fino al quinto ordine.

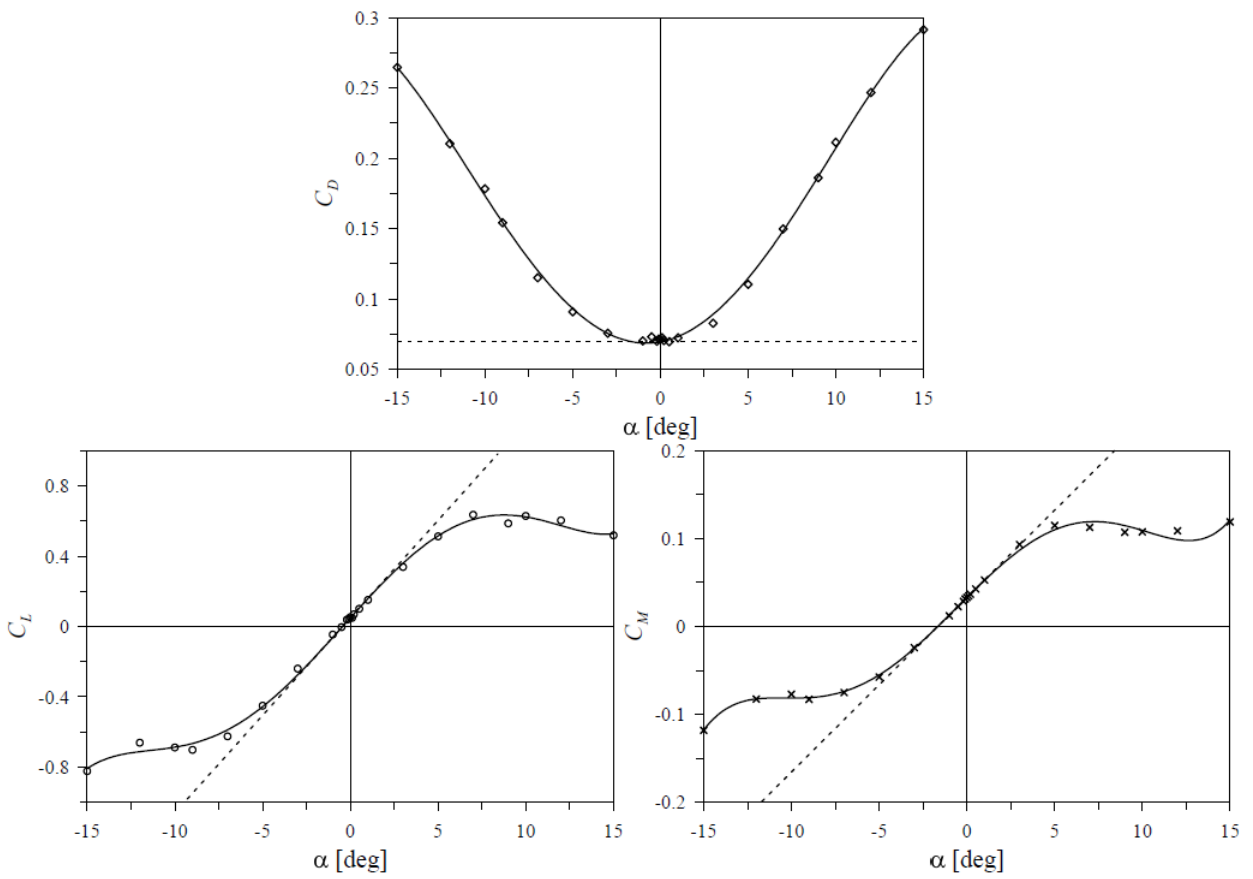


Figura 2.3: Coefficienti aerodinamici di drag, lift e momento aerodinamico relativi all'impalcato del Runyang Bridge

# Capitolo 3

## Costruzione del modello di ponte sospeso soggetto a flutter tramite Wolfram Mathematica

Sulla base di quanto detto nei paragrafi precedenti, attraverso l'utilizzo del software Wolfram Mathematica, si vuole ricostruire la meccanica del ponte sospeso soggetto a flutter. La scelta del suddetto software è dettata dal fatto di essere un sistema integrato di calcolo simbolico, e rende quindi più agevole la determinazione dei sistemi di equazioni alle derivate parziali che descrivono il moto dell'impalcato.

Il procedimento per la determinazione delle matrici del sistema di equazioni differenziali che descrivono il moto del ponte sospeso, nei due gradi di libertà (spostamento verticale e rotazione dell'impalcato), soggetto a forzanti aerodinamiche si articola nelle seguenti fasi:

**Determinazione dei parametri.** Vengono di seguito elencati i parametri, attraverso il quale, previa sostituzione del valore numerico associato, sarà possibile effettuare un'analisi parametrica del moto del ponte sospeso:

*gra*: Accelerazione di gravità (posta pari a  $9.81 \text{ m/s}^2$ );

*l*: Lunghezza della campata del ponte

*Bh*: Larghezza dell'impalcato del ponte

*Bb*: Distanza tra i pendini

*Dd*: Spessore dell'impalcato

*Ey*: Modulo di elasticità longitudinale (o modulo di Young) dei pendini

*Ey*: Modulo di elasticità longitudinale (o modulo di Young) dei cavi

*Gg*: Modulo di elasticità tangenziale (o modulo di taglio) relativo alla sezione trasversale dell'impalcato

*Ac*: Area della sezione dei cavi sospesi

*J1*: Momento d'inerzia di superficie dell'impalcato attorno all'asse  $e_1$

*J2*: Momento d'inerzia di superficie dell'impalcato attorno all'asse  $e_2$

*J3*: Momento d'inerzia di superficie dell'impalcato attorno all'asse  $e_3$

*mC*: Massa dei cavi

*mD*: Massa dell'impalcato

*JmD*: Momento d'inerzia dell'impalcato

*pa*: Densità dell'aria

Dai suddetti parametri sarà possibile ricavare le seguenti grandezze:

$EAc = Ec \cdot Ac$  : Rigidezza assiale dei cavi  
 $EyJ1 = Ey \cdot J1$  : Rigidezza flessionale attorno all'asse  $e_1$   
 $EyJ2 = Ey \cdot J2$  : Rigidezza flessionale attorno all'asse  $e_2$   
 $GJ3$  : Rigidezza torsionale  
 $SWdeck = -gra(mD + 2mC)$  : Peso proprio dell'impalcato  
 $f0 = l/10$  : Abbassamento del cavo in mezzeria della campata

Si inizializzano anche le forzanti:

$f01[x\_ ] = 0$  : Carico statico agente in direzione  $e_1$   
 $f02[x\_ ] = SWdeck$  : Carico statico agente in direzione  $e_2$   
 $c01[x\_ ] = 0$  : Coppia statica agente attorno all'asse  $e_1$   
 $c02[x\_ ] = 0$  : Coppia statica agente attorno all'asse  $e_2$   
 $c03[x\_ ] = 0$  : Coppia statica agente attorno all'asse  $e_3$

$f1[x\_ , t\_ ] = f01[x\_ ]$  : Carico dinamico agente in direzione  $e_1$   
 $f2[x\_ , t\_ ] = f02[x\_ ]$  : Carico dinamico agente in direzione  $e_2$   
 $c1[x\_ , t\_ ] = c01[x\_ ]$  : Coppia dinamica agente attorno all'asse  $e_1$   
 $c2[x\_ , t\_ ] = c02[x\_ ]$  : Coppia dinamica agente attorno all'asse  $e_2$   
 $c3[x\_ , t\_ ] = c03[x\_ ]$  : Coppia dinamica agente attorno all'asse  $e_3$

**Configurazione dei cavi.** La configurazione relativa all'andamento dei cavi sospesi lungo la campata è assunta essere quella di una catenaria, la cui equazione è scritta

$$yC[x\_ ] = \frac{1}{\gamma} \left( \cosh \left[ \gamma \left( \frac{1}{2} - x \right) \right] - \cosh \left[ \frac{\gamma}{2} \right] \right) \quad (3.1)$$

dove  $\gamma$  rappresenta la variabile adimensionale  $\gamma = (mC + mD/2)gl/H0d$ , in cui  $H0d$  è la proiezione orizzontale della tensione nei cavi. Per ricavare la quantità  $H0d$  si impone che la catenaria in mezzeria passi per il punto  $f0$ . In Mathematica è possibile implementare tale operazione con il comando "*FindRoot*", ovvero:

$$\gamma = \text{FindRoot} \left[ yC[0.5] == -\frac{f0}{l}, \{\gamma, 1\} \right] \quad (3.2)$$

una volta nota  $\gamma$  si calcola  $H0d$ .

La lunghezza effettiva dei cavi sospesi, invece, si determina con la seguente integrazione

$$Lc = l \int_0^1 \left( \sqrt{1 + yC'[x]^2} \right) dx \quad (3.3)$$

In Figura 3.1 è mostrato l'andamento della catenaria.

**Parametri adimensionali.** Vengono adimensionalizzati i parametri appena definiti col fine di semplificare le equazioni che andranno a comporre il sistema che descrive il moto del ponte sospeso. In particolare vengono definiti:

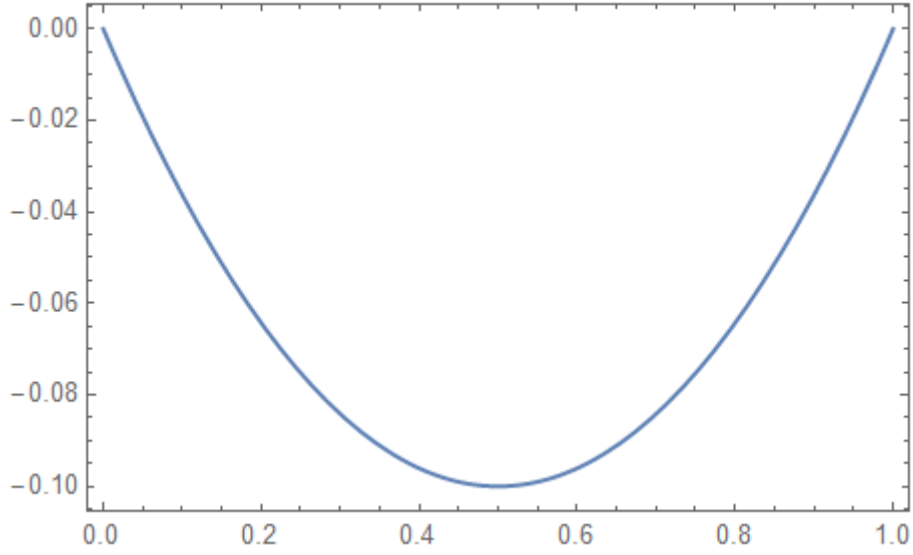


Figura 3.1: Andamento della posizione dei cavi sospesi lungo la coordinata spaziale

$$\begin{aligned}
\omega_c &= \sqrt{\frac{EJ1}{(mD l^4)}} \\
\delta H &= \frac{Bh}{l} \quad \delta B = \frac{Bb}{l} \\
\alpha C &= \frac{H0d}{mD\omega_c^2 l^2} \quad \kappa = \frac{EAcl^2}{EJ1} \quad \chi = \frac{EJ2}{EJ1} \quad \tau = \frac{GJ3}{EJ1} \quad \eta = \frac{Lc}{l} \\
mCnd &= \frac{mC}{mD} \quad mDnd1 = \frac{mD}{mD} \quad mDnd1 = \frac{mD}{mD} + 2mCnd \\
JmDnd &= \frac{JmD}{mDl^2} + \frac{\delta H^2}{2} mCnd \\
\lambda_{01} &= \frac{f_{01}[x]}{mD\omega_c^2 l} \quad \lambda_{02} = \frac{f_{02}[x]}{mD\omega_c^2 l} \\
c_{01nd} &= \frac{c_{01}[x]}{mD\omega_c^2 l} \quad c_{02nd} = \frac{c_{02}[x]}{mD\omega_c^2 l} \quad c_{03nd} = \frac{c_{03}[x]}{mD\omega_c^2 l} \\
\lambda_1 &= \frac{f_1[x, t]}{mD\omega_c^2 l} \quad \lambda_2 = \frac{f_2[x, t]}{mD\omega_c^2 l} \\
c_{1nd} &= \frac{c_1[x, t]}{mD\omega_c^2 l} \quad c_{2nd} = \frac{c_2[x, t]}{mD\omega_c^2 l} \quad c_{3nd} = \frac{c_3[x, t]}{mD\omega_c^2 l}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Vengono adimensionalizzati anche i parametri relativi al vento, in particolare le forzanti e la velocità del vento:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{1}{2} \frac{\rho a U w^2 B b}{mD\omega_c^2 l} \\
\Gamma_f &= \frac{1}{2} \frac{\rho a B b l}{mD} \\
Ub[Uw_-] &= \frac{Uw}{\omega_c l}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

**Funzioni di forma.** L'andamento della deformata del ponte, nello spazio e nel tempo, viene definita attraverso il metodo di Galerkin (paragrafo 3.5.1). Si scelgono quindi delle funzioni test che soddisfano le condizioni al contorno del problema. Una combinazione di queste funzioni, opportunamente amplificate in base a quanto pesa ciascuna componente, descriveranno quindi la configurazione del sistema. In particolare vengono definite sei funzioni di tipo sinusoidale, nei due gradi di libertà del sistema (uno relativo allo spostamento verticale e uno alla rotazione dell'impalcato) che vengono generate in Mathematica, utilizzando il comando *"Table"*, ottenendo la seguente forma matriciale:

$$\Psi[x\_ ] = \begin{bmatrix} \text{Sin}[\pi x]B_1 & \text{Sin}[2\pi x]B_1 & \text{Sin}[3\pi x]B_1 & \text{Sin}[4\pi x]B_1 & \text{Sin}[5\pi x]B_1 & \text{Sin}[6\pi x]B_1 \\ \text{Sin}[\pi x]B_1 & \text{Sin}[2\pi x]B_1 & \text{Sin}[3\pi x]B_1 & \text{Sin}[4\pi x]B_1 & \text{Sin}[5\pi x]B_1 & \text{Sin}[6\pi x]B_1 \end{bmatrix}$$

Queste vengono poi normalizzate rispetto alla massa calcolando il coefficiente  $B_1$ . Si definisce prima la matrice  $Msm$  come

$$Msm = \text{DiagonalMatrix}\{mDnd2, JmDnd\} \quad (3.6)$$

e successivamente si impone che:

$$B_1 = \text{Table}[B_1 \rightarrow \text{Abs}[B_1/.\text{Solve}[\left(\int_0^1 \Psi[x][[\text{All}, \{i\}]]^T.Msm.\Psi[x][[\text{All}, \{i\}]]dx\right) [[1]][[1]] == 1, B_1][[1]], \{i, 1, Nm\}] \quad (3.7)$$

dove  $Nm$  è il numero delle funzioni test.

Una volta trovato il valore di  $B_1$ , questo si sostituisce nella matrice delle funzioni test.

### 3.1 Risposta statica

**Cinematica.** A questo punto si impongono le condizioni cinematiche (e le equazioni di equilibrio) sfruttando la teoria della linea elastica.

$$\begin{aligned} \phi01[x\_ ] &= -\partial_x u02[x] \\ \mu01[x\_ ] &= \partial_x \phi01[x] \\ \mu03[x\_ ] &= \partial_x \phi03[x] \\ M01[x\_ ] &= \mu01[x] \\ T0[x\_ ] &= \tau \mu03[x] \\ Q02[x\_ ] &= \partial_x M01[x] - c01nd \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove:

- $u02$ : è lo spostamento verticale lungo la campata del ponte;
- $\phi01$ : è la rotazione attorno all'asse  $e_1$ ;
- $\phi03$ : è la rotazione attorno all'asse  $e_3$ ;
- $\mu01$ : è la curvatura lungo la direzione  $e_1$ ;

- $\mu 01$ : è la curvatura lungo la direzione  $e_1$ ;
- $M01$ : è il momento agente lungo la campata del ponte;
- $Q02$ : è il taglio agente lungo la campata del ponte;
- $T0$ : è il momento torcente agente lungo la sezione trasversale dell'impalcato;

**Forzanti aerodinamiche** Si definiscono quindi i coefficienti aerodinamici, le cosiddette derivate flutter, necessarie per la determinazione delle forzanti relative all'azione del vento sulla struttura. Queste vengono ricavate sperimentalmente in test nella galleria del vento e si esprimono come segue:

$$DragDVMMFit[\alpha f \_] = \frac{Dd}{Bb}(0.4628629763706778 + 1.2742102821945682\alpha f + 52.95589059840966\alpha f^2 - 8.841920471267809\alpha f^3 - 216.40161592658913\alpha f^4) \quad (3.9)$$

$$LiftDVMMFit[\alpha f \_] = -0.005310628701736623 + 6.211219730740041\alpha f - 0.15058784426315378\alpha f^2 - 71.89662571783046\alpha f^3 - 7.5415231395032825\alpha f^4 + 360.11334826032703\alpha f^5 \quad (3.10)$$

$$MomenttDVMMFit[\alpha f \_] = 0.011804597671734748 + 1.1712746598948753\alpha f - 0.38597354472597023\alpha f^2 - 722.080339170781166\alpha f^3 - 2.117701040903494\alpha f^4 + 155.35587676684096\alpha f^5 \quad (3.11)$$

dove  $\alpha f$  è l'angolo di attacco effettivo del vento.

In realtà queste andrebbero ricavate per ogni tipologia di sezione trasversale che si vuole studiare. In questo caso sono state prese quelle ottenute nello studio aerodinamico effettuato su un modello sezione del Runyang Bridge.

Si definisce successivamente la variabile che andrà sostituita ad  $\alpha f$ , in modo tale che le derivate flutter non dovranno essere definite nuovamente quanto si inseriranno le forzanti aerodinamiche nel problema dinamico. Si scrive quindi

$$\alpha ES[x \_] = \phi 03[x] + \alpha 0 \quad (3.12)$$

e si sostituisce, all'interno dei coefficienti aerodinamici, come di seguito riportano

$$\begin{aligned} CD_s[x \_] &= DragDVMMFit[\alpha f] / .\alpha f \rightarrow (\alpha ES[x]) \\ CL_s[x \_] &= LiftDVMMFit[\alpha f] / .\alpha f \rightarrow (\alpha ES[x]) \\ CM_s[x \_] &= MomentDVMMFit[\alpha f] / .\alpha f \rightarrow (\alpha ES[x]) \end{aligned} \quad (3.13)$$

In figura x è mostrato l'andamento delle derivate flutter in funzione dell'angolo di attacco  $\alpha$ .

**Determinazione delle matrici di rigidità, dei carichi aerodinamici e dei carichi permanenti.** Per la costruzione del sistema statico, che descrive la risposta del ponte per una determinata velocità del vento, vengono definite le matrici che lo compongono. Vengono quindi definite le matrici diagonali, relative alla rigidità del sistema, dei carichi verticali agenti e delle forzanti aerodinamiche. Quindi

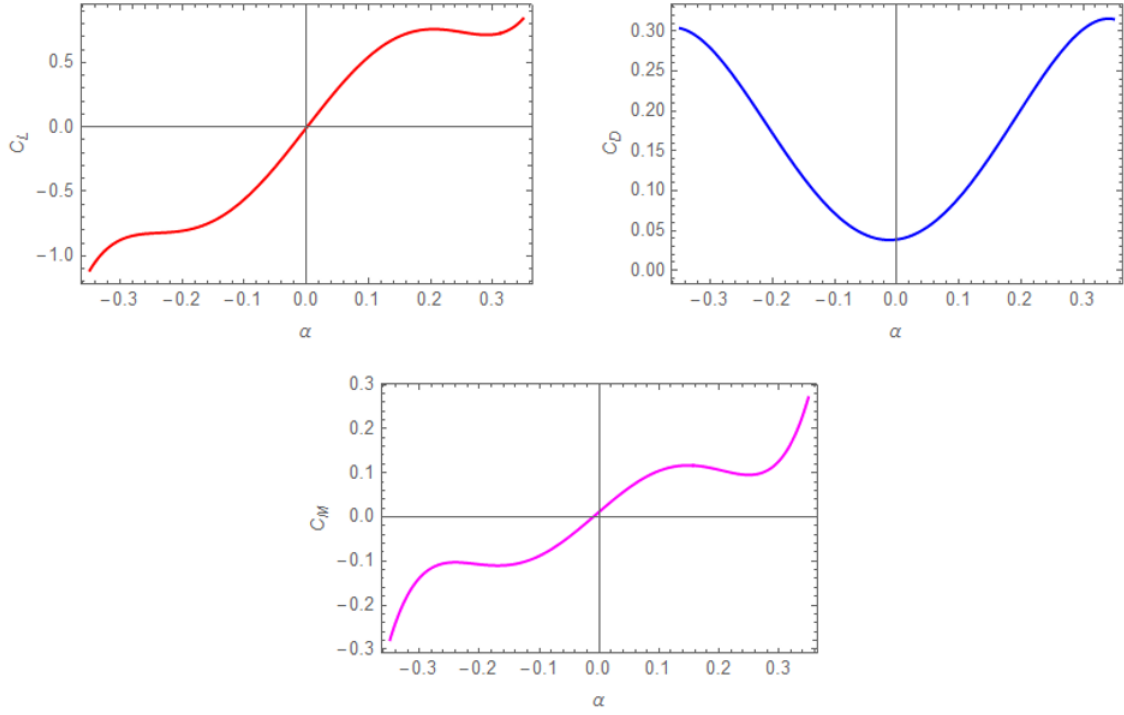


Figura 3.2: Andamento delle derivate flutter in funzione dell'angolo di attacco

$$\begin{aligned}
Stiff0[x\_ ] &= DiagonalMatrix[\{Eqn01, Eqn02\}] \\
Load0[x\_ ] &= DiagonalMatrix[\{\lambda01, c03nd\}] \\
Aero0[x\_ ] &= DiagonalMatrix[\{AeL0[x]Cos[\alpha0] + AeD0[x]Sin[\alpha0], AeM0[x]\}]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

In cui termini all'interno della matrice di rigidezza, già definiti con le (2.1), sono:

$$\begin{aligned}
Eqn01 &= \partial_x Q02[x] + 2\alpha C(\partial_{x,x} u02[x]) + 2\kappa C(\partial_{x,x} yC[x]) \frac{1}{\eta} \int_0^1 ((\partial_x yC[x])(\partial_x u02[x])) dx \\
Eqn02 &= \partial_x T0[x] + \frac{\delta H^2}{2} \alpha C(\partial_{x,x} u03[x]) + \frac{\delta H^2}{2} \kappa C(\partial_{x,x} yC[x]) \frac{1}{\eta} \int_0^1 ((\partial_x yC[x])(\partial_x u03[x])) dx
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Mentre le componenti della matrice dei carichi aerodinamici sono:

$$\begin{aligned}
AeD0[x\_ ] &= \Gamma_0 CD_s[x] \\
AeL0[x\_ ] &= \Gamma_0 CL_s[x] \\
AeM0[x\_ ] &= \Gamma_0 \delta B CM_s[x]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

### Costruzione delle deformate dello spostamento verticale e della rotazione.

A questo punto vengono composti, tramite somma di funzioni sinusoidali, l'andamento dello spostamento verticale e della rotazione lungo la campata. Si determinano innanzitutto i coefficienti che successivamente saranno le incognite del sistema, e che hanno la funzione di dare il peso a ciascuna funzione test. Questi verranno quindi moltiplicati, per



ciascuna componente della matrice  $\Psi[x]$ , con un prodotto riga per colonna:

$$\begin{aligned} X0 &= Table[q0_{i,j}, \{i, 1, Ndots\}, \{j, i, Nm\}] \\ U0[x_] &= Diagonal[X0.\Psi[x]^T] \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove  $Ndots$  rappresenta in numero dei gradi di libertà, in questo caso pari a 2. Il risultato di questa operazione viene di seguito riportato in forma simbolica:

$$U0[x_] = \begin{bmatrix} B_1 \text{Sin}[\pi x] q0_{1,1} + B_1 \text{Sin}[2\pi x] q0_{1,2} + \dots + B_1 \text{Sin}[6\pi x] q0_{1,6} \\ B_1 \text{Sin}[\pi x] q0_{2,1} + B_1 \text{Sin}[2\pi x] q0_{2,2} + \dots + B_1 \text{Sin}[6\pi x] q0_{2,6} \end{bmatrix}$$

Infine si attribuisce la prima riga della matrice come lo spostamento verticale, e la seconda come la rotazione della sezione trasversale dell'impalcato:

$$\begin{aligned} u02[x_] &= U0[x][[1]] \\ \phi03[x_] &= U0[x][[2]] \end{aligned} \quad (3.18)$$

**Proiezione ed integrazione.** A questo punto si proiettano le matrici relative ai carichi sui modi di vibrare e si integra nello spazio (i limiti di integrazione saranno 0 ed 1, poiché i parametri sono stati adimensionalizzati). Questa operazione permette di eliminare la variabile spaziale, e le uniche incognite sono rappresentate dai coefficienti  $q0_{i,j}$ . Infine, le matrici così ottenute, vengono trasposte.

$$\begin{aligned} StiffPrj0[x_] &= \Psi[x]^T.Stiff0[x] \\ LoadPrj0[x_] &= \Psi[x]^T.Load0[x] \\ AeroPrj0[x_] &= \Psi[x]^T.Aero0[x] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} MeqsStiff0 &= \int_0^1 StiffPrj0[x]dx \\ MeqsP0 &= \int_0^1 LoadPrj0[x]dx \\ MeqsAero0 &= \frac{1}{3 Ni} \\ &\left( AeroPrj0[0] + 2 \sum_{i=1}^{Ni/2-1} \left( AeroPrj0 \left[ \frac{2i}{Ni} \right] \right) + 4 \sum_{i=1}^{Ni/2} \left( AeroPrj0 \left[ \frac{2i-1}{Ni} \right] \right) + AeroPrj0[1] \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} StiffVec0 &= Transpose[MeqsStiff0]//Flatten \\ LoadVec0 &= Transpose[MeqsP0]//Flatten \\ AeroVec0 &= Transpose[MeqsAero0]//Flatten \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nell'operazione di integrazione si è scelto di utilizzare, per i soli carichi aerodinamici, la

regola di integrazione di Simpson (vedi paragrafo 3.5.2) per ridurre i tempi di calcolo.  $Ni$  indica la discretizzazione del dominio ed è stato impostato pari a 40.

**Composizione del sistema statico.** Attraverso una semplice operazione di somma tra le matrici trasposte, viene composto il sistema statico che rappresenta la risposta della struttura per una data velocità del vento  $Uw$  e un dato angolo di attacco  $\alpha 0$ . Questo sistema risulterà necessario nel momento in cui si vorrà risolvere il sistema dinamico. Questo perché i coefficienti  $q0_{i,j}$  permettono di rappresentare la configurazione del ponte già sottoposta ad una data velocità e angolo di attacco del vento.

$$\begin{aligned} Eqns0 &= (StiffVec0 + LoadVec0 + AeroVec0) \\ EquSyst &= Table[Eqns0[[i]] == 0, \{i, 1, Ndots Nm\}] \end{aligned} \quad (3.22)$$

La risoluzione di questo sistema viene effettuata al paragrafo 3.4.

## 3.2 Risposta dinamica

### 3.2.1 Impostazione del problema dinamico

Nell'impostazione del sistema dinamico, rispetto a quello statico appena trattato, si aggiungono i termini proporzionali alla velocità e all'accelerazione, in particolare, la matrice di massa e le matrice di smorzamento. Per facilitare la risoluzione, il sistema di equazioni, che descrive il moto del ponte sospeso, è stato trattato come segue.

In generale, il sistema ha una forma del tipo:

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku + c\dot{u} &= p(t) \\ u(0) &= u_o \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_o \end{aligned} \quad (3.23)$$

A questo punto si definisce un vettore  $x = [u, v]$ , in modo tale da poter porre la (3.23) nella forma:

$$\dot{x} = f(x, t) = \begin{bmatrix} v \\ m^{-1}(p(t) - ku - cv) \end{bmatrix}$$

In questo modo è stato abbassato l'ordine dell'equazione differenziale per facilitarne così la risoluzione.

### 3.2.2 Costruzione del sistema dinamico

La costruzione delle matrici segue un procedimento analogo a quello già visto nell'impostazione del problema statico.

**Cinematica.** Si impongono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \phi1[x_, t_] &= -\partial_x u2[x, t] \\ \mu1[x_, t_] &= \partial_x \phi01[x] + \partial_x \phi1[x, t] \\ \mu3[x_, t_] &= \partial_x \phi03[x] + \partial_x \phi3[x, t] \\ M1[x_, t_] &= \mu1[x, t] \\ T[x_, t_] &= \tau \mu3[x, t] \\ Q2[x_, t_] &= \partial_x M1[x, t] - c1nd \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Angolo di attacco del vento.** Poiché l'angolo di attacco effettivo  $\alpha E[x, t]$  è ottenuto sommando l'angolo iniziale di attacco  $\alpha 0 + \phi 03[x]$ , l'incremento di angolo torcente  $\phi 3[x, t]$ , e l'angolo di attacco istantaneo  $\alpha R[x, t]$ , quest'ultimo viene definito come:

$$\alpha R[x\_ , t\_ ] = - \left( \frac{uP2[x, t] + \frac{\delta B}{4} \phi P3[x, t]}{Ub[Uw]} \right) \quad (3.25)$$

dove  $uP2$  e  $\phi P3$  sono, rispettivamente, la velocità dello spostamento verticale e della torsione angolare della sezione trasversale, e verranno definiti successivamente. L'angolo di attacco  $\alpha E$  e i relativi coefficienti aerodinamici vengono quindi definiti come:

$$\alpha E[x\_ , t\_ ] = \alpha 0 + \phi 03[x] + \phi 3[x, t] + \alpha R[x, t] \quad (3.26)$$

Si può effettuare la seguente sostituzione:

$$\begin{aligned} CD[x\_ , t\_ ] &= DragDVMMFit[\alpha f] / .\alpha f \rightarrow (\alpha E[x, t]) \\ CL[x\_ , t\_ ] &= LiftDVMMFit[\alpha f] / .\alpha f \rightarrow (\alpha E[x, t]) \\ CM[x\_ , t\_ ] &= MomentDVMMFit[\alpha f] / .\alpha f \rightarrow (\alpha E[x, t]) \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Costruzione delle matrici.** Operando in maniera simbolica, tramite questo passaggio, è stato possibile ricavare le matrici che compongono il sistema che descrive il moto del ponte. Queste saranno fondamentali per la costruzione del algoritmo in linguaggio Python. Preliminarmente alla costruzione delle matrici, vengono definiti spostamenti e rotazioni totali come somma di quelli statici e di quelli dinamici. Si scrive:

$$\begin{aligned} u2Tot[x, t] &= u02[x] + u2[x, t] \\ \phi 1Tot[x, t] &= \phi 01[x] + \phi 1[x, t] \\ \phi 3Tot[x, t] &= \phi 03[x] + \phi 3[x, t] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si definiscono di seguito le matrici di massa, smorzamento, rigidità, carichi verticali e carichi aerodinamici:

$$\begin{aligned} Iner[x\_ , t\_ ] &= DiagonalMatrix[\{mDnd2\partial_t uP2[x, t], JmDnd\partial_t \phi P3[x, t]\}] \\ Dam[x\_ , t\_ ] &= DiagonalMatrix[\{-c11 uP2[x, t], -c22 \phi P3[x, t]\}] \\ Stiff[x\_ , t\_ ] &= DiagonalMatrix[\{Eqn1, Eqn2\}] \\ Load[x\_ , t\_ ] &= DiagonalMatrix[\{\lambda 2, c3nd\}] \\ Aero[x\_ , t\_ ] &= DiagonalMatrix[\{AeL[x, t]Cos[\alpha 0 + \phi 03[x] + \alpha R[x, t]] + \\ &AeD[x, t]Sin[\alpha 0 + \phi 03[x] + \alpha R[x, t]], AeM[x, t]\}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dove  $c11$  e  $c22$  sono i coefficienti di smorzamento che verranno definiti in seguito. I termini che compongono la matrice di rigidità sono:

$$\begin{aligned}
Eqn1 &= \partial_x Q2[x, t] + 2\alpha C(\partial_{x,x} u2Tot[x, t]) + 2\kappa C(\partial_{x,x} yC[x]) \frac{1}{\eta} \int_0^1 ((\partial_x yC[x])(\partial_x u2Tot[x, t])) dx \\
Eqn2 &= \partial_x T[x, t] + \frac{\delta H^2}{2} \alpha C(\partial_{x,x} u3[x, t]) + \frac{\delta H^2}{2} \kappa C(\partial_{x,x} yC[x]) \frac{1}{\eta} \int_0^1 ((\partial_x yC[x])(\partial_x u3Tot[x, t])) dx
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

Mentre le componenti della matrice dei carichi aerodinamici sono:

$$\begin{aligned}
AeD[x_, t_] &= \Gamma 0 CD[x, t] \\
AeL[x_, t_] &= \Gamma 0 CL[x, t] \\
AeM[x_, t_] &= \Gamma 0 \delta B CM[x, t]
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

**Definizioni delle componenti di velocità e spostamento.** Come effettuato per il caso statico, tramite sovrapposizione di funzioni sinusoidali di costruiscono le forme dello spostamento, e in questo caso, poiché si sta affrontando un problema dinamico, anche della velocità. Ripetendo lo stesso procedimento effettuato nel paragrafo 3.1, si ha:

$$\begin{aligned}
X[t_] &= Table[q_{i,j}, \{i, 1, Ndots\}, \{j, i, Nm\}] \\
U[x_, t_] &= Diagonal[X[t].\Psi[x]^T]
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
Xv[t_] &= Table[q_{i,j}, \{i, Ndots + 1, 2 Ndots\}, \{j, i, Nm\}] \\
Uv[x_, t_] &= Diagonal[Xv[t].\Psi[x]^T]
\end{aligned}$$

Si definiscono quindi:

$$\begin{aligned}
u2[x_, t_] &= U[x, t][[1]] \\
\phi3[x_, t_] &= U[x, t][[2]]
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
uP2[x_, t_] &= Uv[x, t][[1]] \\
\phiP3[x_, t_] &= Uv[x, t][[2]]
\end{aligned}$$

**Condizioni iniziali.** Per la risoluzione del sistema dinamico è necessario definire le condizioni iniziali, in particolare spostamento e velocità iniziale, con cui parte il moto del ponte. La configurazione iniziale, mostrata in Figura 3.3 viene definita come:

$$\begin{aligned}
Ut0[x_] &= DiagonalMatrix[\{-Sum[0.05 ICcoef/m \Psi[x][[1, m]], \{m, 1, NmIC, 1\}], \\
&Sum[5 ICcoef/m \Psi[x][[2, m]], \{m, 1, NmIC, 1\}\}] \\
Vt0[x_] &= DiagonalMatrix[Table[0, \{j, 1, Ndots\}]]
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

dove  $NmIC$  rappresenta il numero dei modi considerati, in questo caso posto uguale a 2,

mentre  $ICcoef$  è un coefficiente relativo alle condizioni iniziali posto pari a 0.005. Queste espressioni saranno trattate in modo da trovare un valore da attribuire ai coefficienti  $q_{i,j}[t = 0]$ , che definiscono i pesi da attribuire alle funzioni test nell'istante iniziale.

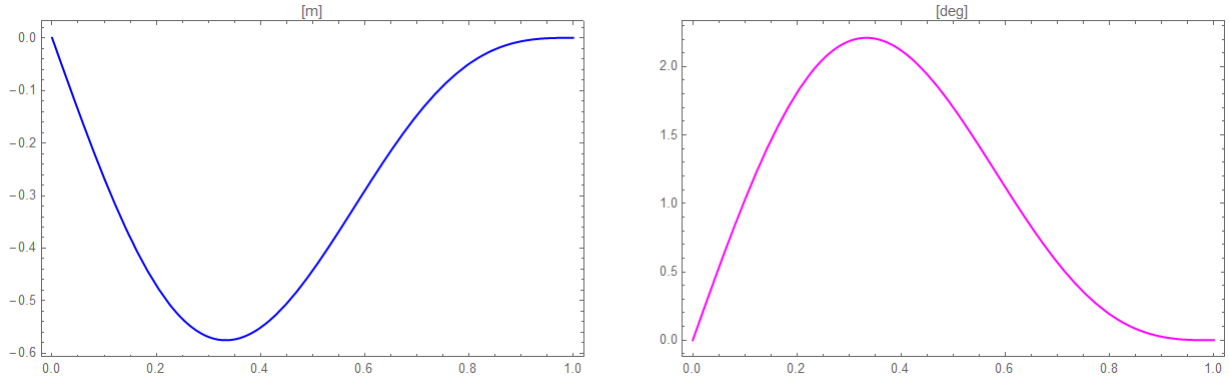


Figura 3.3: Configurazione iniziale del ponte

**Proiezione ed integrazione.** Come effettuato nel caso statico si procede con la proiezione delle matrici impostate sui modi di vibrare e, all'integrazione delle stesse. In questa operazione rientrano anche le matrici che definiscono le condizioni iniziali del problema.

$$\begin{aligned}
 MasPrj[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Iner[x, t] \\
 DamPrj[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Dam[x, t] \\
 StiffPrj[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Stiff[x, t] \\
 LoadPrj[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Load[x, t] \\
 AeroPrj[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Aero[x, t]
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 U_{simterm}[x_, t_] &= \Psi[x]^T . DiagonalMatrix[U[x, t]] \\
 U0_{simterm}[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Ut0[x, t] \\
 V_{simterm}[x_, t_] &= \Psi[x]^T . DiagonalMatrix[V[x, t]] \\
 V0_{simterm}[x_, t_] &= \Psi[x]^T . Vt0[x, t]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MeqsM[t\_ ] &= \int_0^1 MasPrj[x, t] dx \\
MeqsC[t\_ ] &= \int_0^1 DamPrj[x, t] dx \\
MeqsStiff[t\_ ] &= \int_0^1 StiffPrj[x, t] dx \\
MeqsP[t\_ ] &= \int_0^1 LoadPrj[x, t] dx \\
MeqsAero[t\_ ] &= \frac{1}{3 Ni} \\
&\left( AeroPrj[0, t] + 2 \sum_{i=1}^{Ni/2-1} \left( AeroPrj \left[ \frac{2i}{Ni}, t \right] \right) + 4 \sum_{i=1}^{Ni/2} \left( AeroPrj \left[ \frac{2i-1}{Ni}, t \right] \right) + AeroPrj[1, t] \right) \\
MeqsU[t\_ ] &= \int_0^1 Usimterm[x, t] dx \\
MeqsV[t\_ ] &= \int_0^1 Vsimterm[x, t] dx \\
MeqsU0[t\_ ] &= \int_0^1 U0simterm[x, t] dx \\
MeqsV0[t\_ ] &= \int_0^1 V0simterm[x, t] dx
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Come fatto in precedenza queste vengono trasposte utilizzando il comando "*Transpose*" di Mathematica.

$$\begin{aligned}
MassVec &= Transpose[MeqsM[t]]//Flatten \\
DampVec &= Transpose[MeqsC[t]]//Flatten \\
StiffVec0 &= Transpose[MeqsStiff[t]]//Flatten \\
LoadVec &= Transpose[MeqsP[t]]//Flatten \\
AeroVec &= Transpose[MeqsAero[t]]//Flatten
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
MeqsUicExp &= Transpose[MeqsU[0]] \\
MeqsVicExp &= Transpose[MeqsV[0]] \\
MeqsU0Exp &= Transpose[MeqsU0] \\
MeqsV0Exp &= Transpose[MeqsV0]
\end{aligned}$$

**Matrice di masse e definizione ultima delle condizioni iniziali.** Si procede quindi con la determinazione di una matrice di massa di dimensioni  $(2 Nm \cdot 2 Nm)$ . Questa sar  una matrice in cui sulla diagonale vengono spalmati i coefficienti del vettore *MassVec* appena definito. Si procede quindi con la seguente istruzione in Mathematica:

$$\begin{aligned}
MassMatrx &= DiagonalMatrix[Diagonal[Table[Coefficient[MassVec[t] \\
&[[i]], XvPr], {i, 1, NdofsNm}]]]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

dove  $XvPr = Xv'[t]$  sono i coefficienti aventi le dimensioni di un'accelerazione, essendo appunto le derivate rispetto al tempo delle velocità.

Vengono infine definiti i valori da attribuire ai coefficienti  $q_{i,j}[0]$ :

$$\begin{aligned}
IncUMatrix &= DiagonalMatrix[Diagonal[Table \\
&[Coefficient[MeqsUicExp[[i]], X0ic], \{i, 1, Ndofs Nm\}]]] \\
IncVMatrix &= DiagonalMatrix[Diagonal[Table \\
&[Coefficient[MeqsVicExp[[i]], Xv0ic], \{i, 1, Ndofs Nm\}]]] \\
InCond &= Join[Table[X0ic[[i]] == (Inverse[IncUMatrix].MeqsU0Exp)[[i]], \{i, 1, Ndofs Nm\}], \\
&Table[Xv0ic[[i]] == (Inverse[IncVMatrix].MeqsV0Exp)[[i]], \{i, 1, Ndofs Nm\}] \\
\end{aligned} \tag{3.39}$$

**Impostazione del sistema dinamico.** Di seguito si procede con l'assemblamento del sistema 3.2.1. In particolare vengono costruiti due sistemi di equazioni: uno per la risoluzione dinamica del moto relativo al ponte sospeso, e l'altro per la determinazione dei modi di vibrare della struttura, nella quale non vengono presi in considerazione, ovviamente, le forzanti esterne, in questo caso rappresentate dai soli carichi aerodinamici. Si imposta preliminarmente la parte a secondo membro del sistema relativa agli spostamenti

$$\begin{aligned}
RightSideEqns &= (StiffVec[t] + LoadVec[t] + DampVec[t] + AeroVec[t]) \\
RightSideEqnsEig &= (StiffVec[t] + LoadVec[t] + DampVec[t]) \\
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
Eqns &= Inverse[MassMatrix].RightSideEqns \\
EqnsEig &= Inverse[MassMatrix].RightSideEqnsEig
\end{aligned}$$

Una volta definita, si assembla l'intero sistema nel seguente modo

$$\begin{aligned}
EqnsSyst &= Join[Table[MeqsAuxL[t][[i]] == MeqsAuxR[t][[i]], \{i, 1, Ndofs Nm\}], \\
&Table[XvPr[[i]] == Eqns[[i]], \{i, 1, Ndofs Nm\}] \\
AeroDynSyst &= Join[Table[MeqsAuxL[t][[i]] == MeqsAuxR[t][[i]], \{i, 1, Ndofs Nm\}], \\
&Table[XvPr[[i]] == Eqns[[i]], \{i, 1, Ndofs Nm\}], Table[InCond[[i]], \{i, 1, Length[InCond\}]] \\
\end{aligned} \tag{3.41}$$

dove  $MeqsAuxL$  e  $MeqsAuxR$  rappresentano la condizione a secondo membro del sistema relativo alle velocità. Si impone quindi che le derivate degli spostamenti coincidono con le velocità. In particolare si ha

$$\begin{aligned}
MeqsAuxL[t\_ ] &= Table[X'[t][[i, j]], i, 1, Ndots, j, 1, Nm]//Flatten \\
MeqsAuxR[t\_ ] &= Table[Xv[t][[i, j]], i, 1, Ndots, j, 1, Nm]//Flatten
\end{aligned}
\tag{3.42}$$

### 3.3 Modi di vibrazione del ponte sospeso

Per determinare i modi di vibrazione della struttura occorre risolvere il problema delle oscillazioni libere. Si considera quindi il sistema di equazioni

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o} \tag{3.43}$$

Si assume come soluzione del sistema una funzione armonica del tipo

$$\mathbf{u} = \Phi \sin(\omega t) \tag{3.44}$$

Sostituendo la soluzione nel sistema di equazioni del moto si ottiene

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Phi = \mathbf{o} \tag{3.45}$$

Per verificare tale sistema di equazioni abbiamo due possibilità:

- soluzione banale  $\Phi = \mathbf{o}$
- soluzione non nulla  $(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Phi = \mathbf{o}, \Phi \neq \mathbf{o}$

Ciò che si vuole trovare sono dei vettori  $\Phi$  diversi da zero. Questo è possibile solo se il sistema di equazioni è singolare, ossia, se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Allora la ricerca di soluzioni non banali porta a

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \tag{3.46}$$

detta determinante caratteristico.

Ad ogni pulsazione naturale  $\omega_i$  corrisponde un vettore  $\Phi_i$ , soluzione del sistema (3.46). Tali vettori sono detti modi di vibrazione, e sono tanti quante sono le pulsazioni. Poiché le pulsazioni naturali rendono singolare il sistema, i modi  $\Phi_i$  potranno essere determinati solo a meno di una costante.

Una proprietà importante dei modi naturali è la seguente

$$\mathbf{M} \Phi_i \cdot \Phi_j = 0 \tag{3.47}$$

ossia, i modi sono ortogonali rispetto alla matrice di massa. Questi possono essere anche resi ortonormali rispetto alla massa: i modi sono stati determinati a meno di una costante arbitraria, che può essere scelta in modo da verificare la richiesta

$$\mathbf{M} \Phi_i \cdot \Phi_j = \delta_{ij} \tag{3.48}$$

Inoltre, per determinare il contributo del modo, ci si riferisce alla massa partecipante  $\tilde{\mathbf{M}}_j$  alla vibrazione di quel modo, o meglio alla sua percentuale rispetto alla massa totale. La massa partecipante è data dall'espressione

$$\tilde{\mathbf{M}}_j = \gamma_j^2 \cdot \mathbf{M}_j^* \tag{3.49}$$



dove

$$\gamma_j = \frac{\Phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{R}}{M_j^*} \quad (3.50)$$

Viene di seguito riportato l'algoritmo implementato in Mathematica per la ricerca delle vibrazioni libere del ponte sospeso e della valutazione della massa partecipante associata a ciascun modo.

Preliminarmente vengono definiti i coefficienti di smorzamento precedentemente menzionati.

$$\begin{aligned} EigFEM &= \{281.833406, 699.198874\} \\ \omega 1 &= EigFEM[[1]]; \omega 2 = EigFEM[[2]]; \\ DampPar &= \{c11 \rightarrow \frac{\zeta}{100} m Dnd2 \omega 1, c22 \rightarrow \frac{\zeta}{100} Jm Dnd \omega 2\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$EigPars = \{\zeta \rightarrow 0.5, Uw \rightarrow 0, Amp \rightarrow 0\}$$

Si procede quindi con il calcolo delle pulsazioni proprie del sistema di equazioni utilizzando semplicemente il comando "*Eigenvalues*" di Mathematica:

$$ModStiffMatr = Table[Coefficient[EqnsEig[[i]]/.EigPars /.StiffPar, X[t]/Flatten], {i, 1, NdofsNm}] \quad (3.52)$$

$$NatFreq = Sqrt[Eigenvalues[ModStiffMatr]] \quad (3.53)$$

I vettori modali corrispondenti si trovano con l'espressione "*Eigenvectors*". Questi saranno poi normalizzati.

$$\begin{aligned} Lambda &= Im[NatFreq] \\ \Phi V &= Transpose[Eigenvectors[ModStiffMatr]/Chop] \\ \Phi V x &= ConstantArray[0, \{Ndofs, Ndofs Nm\}] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} For[k = 1, k <= NdofsNm, k ++, \\ For[j = 1, j <= Ndofs, j ++, \\ \Phi V x[[j, k]] &= Sum[\Phi V[[i + Nm(j - 1), \{k\}]] \Psi[x][[j, i]], \{i, 1 Nm\}]; \\ ]; \\ ]; \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\Psi V[x_] = \Phi V x; \quad (3.56)$$

Si definisce la costante di normalizzazione

$$\alpha V = \int_0^1 \text{Diagonal}[\Psi V[x]^T . Msm . \Psi V[x]] dx \quad (3.57)$$

e si ottengono i vettori normalizzati

$$\Psi Vnorm[x\_ ] = \{\{\}\}; \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} & \text{For}[i = 1, i \leq NdotsNm, i ++, \\ & \quad \text{If}[\alpha V[[i]] == 0, \alpha V[[i]] = 10^{-8}]; \\ & \quad \Psi Vnorm[x\_ ] = \text{Join}[\Psi Vnorm[x], \frac{1}{\sqrt{\alpha V[[i]]}} \Psi V[x][[All, \{i\}], 2]; \\ & \quad ]; \end{aligned} \quad (3.59)$$

Si procede poi con il calcolo della percentuale di massa partecipante:

$$\tau Boo = \text{Table}[\{1\}, \{i, 1, Ndots\}]; \quad (3.60)$$

$$\Gamma t \Gamma = \text{Chop} \left[ \int_0^1 \Psi Vnorm[x]^T . Msm . \Psi Vnorm[x] dx, 10^{-8} \right]; \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} & \text{For}[i = 1, i \leq NdotsNm, i ++, \\ & \quad \Gamma i[i] = \left( \int_0^1 \Psi Vnorm[x][[All, \{i\}]]^T . Msm . \tau Boo dx // Flatten \right) [[1]] \\ & \quad ]; \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & \text{Table}[\Gamma i[i], \{i, 1, Ndots Nm\}]; \\ & \Gamma sq = \text{Chop} [\text{Table} [\{\Gamma mai[i]^2\} // Chop, \{i, 1, Ndots Nm\}], 10^{-8}]; \\ & meff = (\text{Inverse}[\Gamma t \Gamma] . \Gamma sq) // Flatten; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} & \text{For}[i = 1, i \leq NdotsNm, i ++, \\ & \quad \text{Pos}[i] = \text{Complement}[\text{Table}[\{j\}, \{j, 1, \text{Length}[\Phi V[[i, All]]\}], \\ & \quad \text{Position}[\Phi V[[i, All], 0]] // Flatten; \\ & \quad ]; \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} & \text{For}[j = 1, j \leq Ndots, j ++, \\ & \quad \text{Posdof}[j] = \text{Union}[\text{Table}[\text{Pos}[i + Nm(j - 1)], \{i, 1, Nm\}] // Flatten]; \\ & \quad ]; \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\text{ResMass}[j] = Msm[[j, j]] - \text{Sum}[meff[[\text{Posdof}[j][[k]]], \{k, 1, \text{Length}[\text{Posdof}[j]]\}]; \quad (3.66)$$

$$\text{PercMecc}[j] = 100 \left( \frac{\text{ResMass}[j]}{Msm[[j, j]]} \right) \quad (3.67)$$

In Figura 3.4 si riportano i modi di vibrare del ponte nei due gradi di libertà, spostamento verticale e rotazione dell'impalcato, rispettivamente.

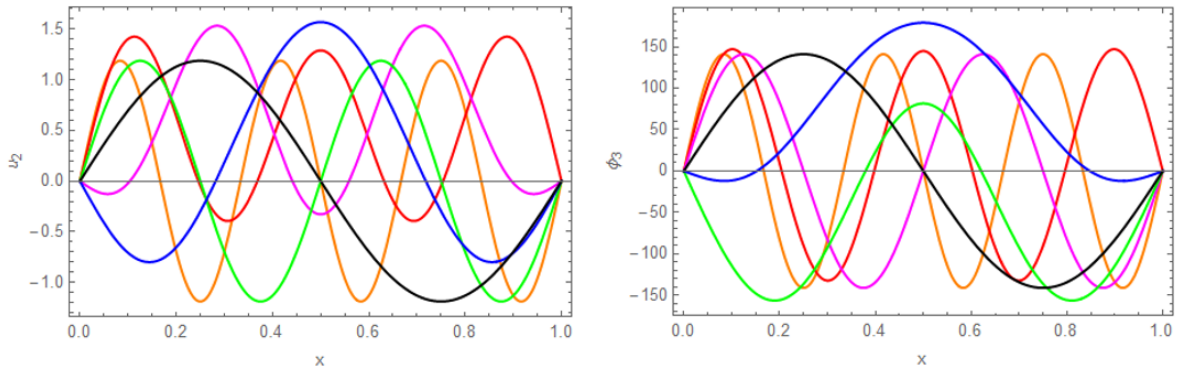


Figura 3.4: Modi di vibrare del ponte nei due gradi di libertà, spostamento verticale e rotazione dell'impalcato

### 3.4 Risoluzione del problema statico e dinamico

Una volta impostati i sistemi di equazioni si procede con la loro risoluzione. Questi descrivono due tipi di fenomeni differenti: uno rappresenta l'instabilità statica dovuta alla divergenza torsionale, mentre l'altro descrive la risposta dinamica del ponte, ed in particolare il fenomeno di flutter.

**Problema statico (Divergenza torsionale).** Il valore della velocità critica oltre il quale si ha instabilità statica, è più alto nel caso di divergenza torsionale rispetto al fenomeno di flutter. D'altro canto, non dovendo rappresentare un andamento nel tempo, ma semplicemente una soluzione che permette l'equilibrio del sistema, una volta definiti i parametri relativi alla velocità e all'angolo di attacco del vento, basterà trovare la soluzione del sistema precedentemente impostato ("*EquSyst*"). Per trovare quindi il valore dei coefficienti che permettono di rappresentare la deformata istantanea del ponte sospeso, si applica il comando "*FindRoot*" al sistema di equazioni, come di seguito illustrato.

$$Uw0 = \{\text{Valore numerico}\} \quad (3.68)$$

$$\alpha W0 = \{\text{Valore numerico}\} \quad (3.69)$$

$$DPLpar0 = \{Uw \rightarrow Uw0, \alpha0 \rightarrow \alpha W0\}; \quad (3.70)$$

$$X0solTrial = \text{Table}[\{X0sol[[i]], 0\}, \{i, 1, \text{Length}[X0sol]\}] \quad (3.71)$$

$$\text{SolNonLin0} = \text{FindRoot}[\text{EquSyst}/.DPLpar0, X0solTrial]//\text{Flatten} \quad (3.72)$$

L'andamento delle deformate del ponte, nei gradi di libertà considerati, vengono rappresentati in Figura 3.5, calcolati per una velocità del vento pari a 60 m/s ed angolo di attacco pari a zero.

**Problema dinamico (Flutter).** Per la risoluzione del problema dinamico, oltre ai parametri relativi alle componenti di smorzamento e delle azioni del vento, bisogna definire lo step temporale massimo di integrazione. Questo perché Mathematica, quando viene utilizzato il comando di risoluzione delle equazioni differenziali "*NDSolve*", procede attraverso l'applicazione di metodi numerici approssimati, come quello di Runge-Kutta, trattato al paragrafo 3.5.3. Affinché questo metodo risulti efficace, bisogna selezionare un intervallo temporale di integrazione sufficientemente basso, in particolare sotto il quarto del periodo proprio della struttura. Di seguito è riportata la procedura di integrazione nel

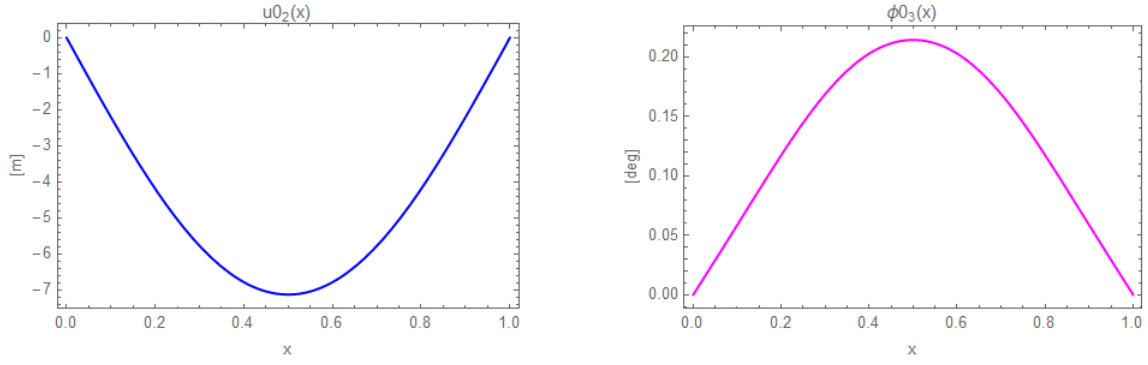


Figura 3.5: L'andamento delle deformate del ponte, nei gradi di libertà considerati, calcolati per una velocità del vento pari a  $60 \text{ m/s}$  ed angolo di attacco pari a zero

tempo del sistema di equazioni che descrive il moto del ponte sospeso.

$$tmax = \{\text{Valore numerico}\}; \quad (3.73)$$

$$PLpar = \{\zeta \rightarrow 0.5, Uw \rightarrow Uw0, \alpha0 \rightarrow \alpha W0\}; \quad (3.74)$$

$$Off[NDSolve :: ndsdtc]; \quad (3.75)$$

$$Time1 = TimeUsed[]; \quad (3.76)$$

$$OmInt = Im[NatFreq[[RefTM]]]; \quad (3.77)$$

$$DeTmax = Min \left[ \frac{2\pi}{50 OmInt}, 10^{-4} \right] // N; \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} AeroDynSystSUBS = & AeroDynSyst/.SolNonLin0/.StiffPar \\ & /.DynIntCoeff/.DPLpar; \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} SolNonLin = & NDSolve[AeroDynSystSUBS, XsolAero, \{t, 0, tmax\}, \\ & MaxSteps \rightarrow Infinity, MaxStepSize \rightarrow DeTmax, \\ & Method \rightarrow \text{"ExplicitRungeKutta"}] // Flatten; \end{aligned} \quad (3.80)$$

La risoluzione del problema dinamico consente di vedere l'andamento dello spostamento verticale e della rotazione, per una data velocità ed angolo di attacco del vento, nel tempo. In Figura 3.6 viene plottata la risposta del ponte, valutata ad un quarto della luce, per una velocità del vento vicina a quella di flutter, considerando sia il contributo della risposta statica, derivante dall'equazione (3.72), sia soltanto la soluzione non lineare (3.81). Attraverso il comando *Animate* invece è stato possibile plottare il moto dell'intera deformata del ponte, sempre nei due gradi di libertà, potendo così constatare l'effettiva configurazione che questo assume durante l'applicazione dei carichi aeroelastici. In Figura 3.7 è mostrato l'output di Mathematica, mentre di seguito è riportato il codice relativo all'utilizzo del comando *Animate*.

$$\begin{aligned} & Animate[Plot[l Motion[x, tau][[1]], \{x, 0, 1\}, PlotRange \rightarrow \{\{0, 1\}, \{20, -20\}\}, \{tau, 0, 3\}] \\ & Animate[Plot[\frac{180}{\pi} Motion[x, tau][[2]], \{x, 0, 1\}, PlotRange \rightarrow \{\{0, 1\}, \{20, -20\}\}, \{tau, 0, 3\}] \end{aligned} \quad (3.81)$$

dove:

$$Motion[x_, t_] = \{u2[x, t], \phi3[x, t]\} /. SolNonLin; \quad (3.82)$$

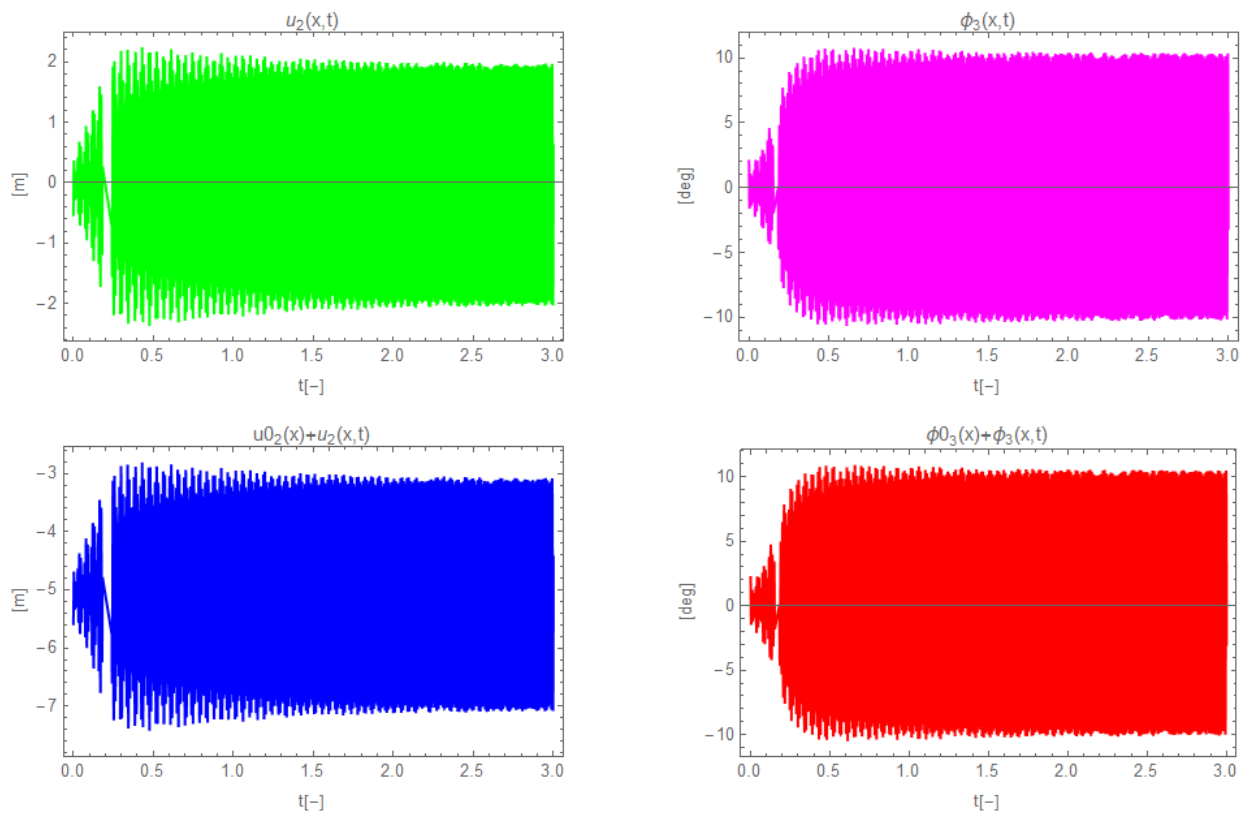


Figura 3.6: L'andamento delle oscillazioni del ponte nel tempo adimensionalizzato

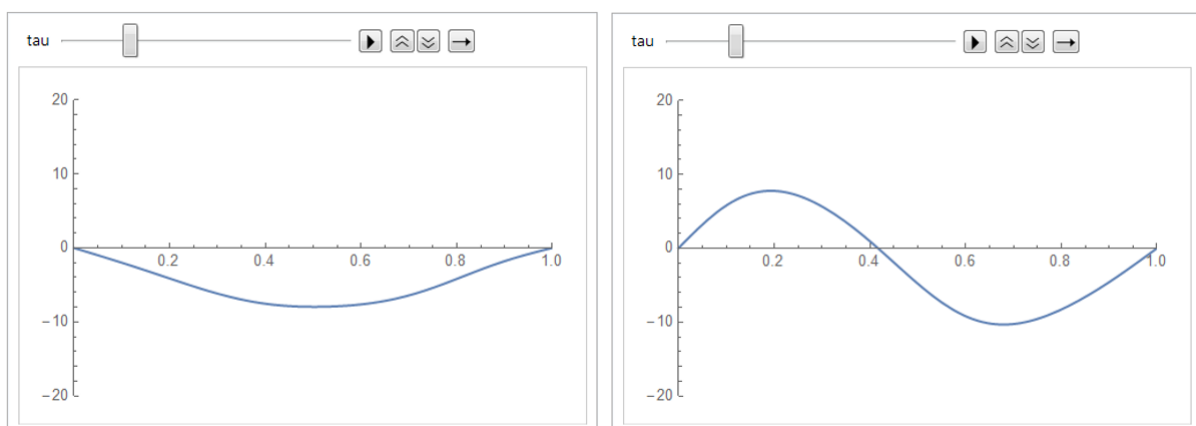


Figura 3.7: L'andamento della configurazione del ponte sospeso nel tempo adimensionalizzato attraverso il comando *Animate*

## 3.5 Metodi di risoluzione approssimati

### 3.5.1 Metodo di Galerkin

Il metodo di Galerkin consente di formulare e risolvere le equazioni differenziali con un procedimento che si avvicina agli elementi finiti. Tale metodo permette di passare dalla risoluzione di un problema definito in uno spazio continuo alla risoluzione di tale problema in uno spazio discreto al fine di determinarne una soluzione numerica approssimata.

Il metodo di Galerkin prevede di effettuare la discretizzazione del problema di ricerca della funzione incognita su una sequenza di sottospazi tali che in ciascuno di questi sottospazi di dimensione finita il problema iniziale è risolvibile in modo esatto. Il nuovo problema così ottenuto deriva dalla discretizzazione del dominio dell'unica funzione incognita.

Per meglio comprendere tale procedura, consideriamo una trave incastrata ad un estremo soggetta a deformazione imposta all'estremo libero, in particolare alla rotazione dell'asse medio di un angolo  $\alpha$  e soggetta ad un momento flettente uniforme  $m$  su tutta la lunghezza come mostrato in Figura 3.8.

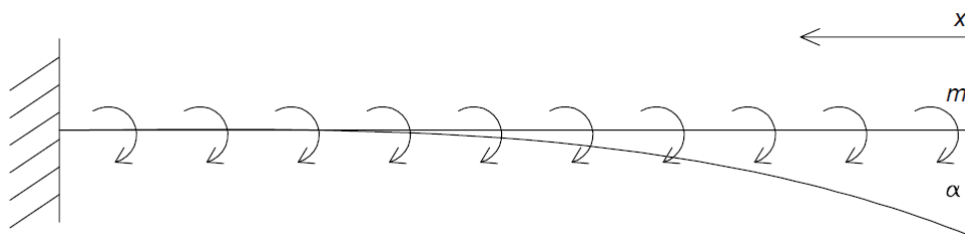


Figura 3.8: Trave inflessa

La trave sarà caratterizzata dalle proprietà del materiale (modulo elastico  $E$ ) e geometrica (momento d'inerzia  $J$ ) che si assumono costanti. L'equazione della linea elastica assume la forma

$$-EJy_{xx} = m \quad (3.83)$$

dove  $x$  è l'unica variabile indipendente. Le condizioni al contorno associate sono

$$\begin{aligned} y_x &= 0 && \text{per } x = L \\ y &= 0 && \text{per } x = L \\ y_x &= \alpha && \text{per } x = 0. \end{aligned}$$

La soluzione esatta, ottenuta dall'integrazione della (3.83), è

$$y(x) = -\frac{1}{EJ} \int_x^L \left( \int_0^\zeta m(\xi) d\xi \right) d\zeta + \alpha x - \alpha L. \quad (3.84)$$

In questo caso la soluzione analitica si è potuta facilmente calcolare; laddove spesso invece non sia possibile, il metodo di Galerkin consente di determinare una soluzione approssimata del problema altrimenti non risolvibile.

La procedura per la costruzione di elementi finiti per affrontare un problema strutturale prevede che si scelga una griglia di punti, nell'intervallo  $0 \leq x \leq L$  così da costituire una serie di intervalli non sovrapposti che coprano l'intero dominio. Ciascuno dei punti è detto *nodo*. Su ciascuno di questi punti la funzione incognita (ovvero la deformata) può essere approssimata con funzioni note predeterminate, chiamate  $\Phi_j(x)$  e corrispondenti parametri incogniti  $c_j$ . Le funzioni  $\Phi_j$  sono dette *funzioni di forma*, la cui espressione deve essere scelta in modo da rispettare le condizioni al contorno.

L'inflessione dell'asse della trave si può quindi esprimere come sommatoria delle funzioni di forma, ciascuna pesata per il parametro specifico incognito

$$y_N(x) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(x) \quad (3.85)$$

in quanto le funzioni di forma, rispettando le condizioni di definizione del dominio discretizzato per cui  $y_N \in M_N$ , sono esprimibili come loro combinazione lineare. L'insieme  $M_N$  a cui appartiene la soluzione approssimata  $y_N(x)$  infatti, è l'insieme spazzato da tutte le funzioni utilizzate per costruire l'approssimante.

Dato che una tale approssimazione non consente di annullare l'errore in tutto il dominio, la differenza tra la soluzione esatta  $y(x)$  e quella approssimata  $y_N(x)$  rappresenta proprio questo errore definito come *funzione residua* uguale a

$$R(y, x) = -EJy_{xx} - m. \quad (3.86)$$

La funzione residua non è nulla ovunque, però si può fare in modo che, moltiplicata per una *funzione peso*  $W(x)$ , si annulli il suo integrale, ovvero

$$\int_0^L W(x)R(y, x) dx = 0. \quad (3.87)$$

La scelta di diverse funzioni  $W(x)$  consente di costruire un sistema di equazioni lineari, nelle variabili  $c_j$  per arrivare ad un'approssimazione della deformata. Nella formulazione di Galerkin le funzioni peso sono uguali alle funzioni di forma, ovvero si pone

$$W_j(x) = \Phi_j(x). \quad (3.88)$$

Dato che il numero di parametri incogniti  $c_j$  è pari a quello delle funzioni di forma  $\Phi_j(x)$ , si ottiene un sistema di equazioni lineari che ha un'unica soluzione se le condizioni al contorno sono ben poste e ben definite.

In definitiva, seguendo la procedura del metodo di Galerkin, dall'equazione (3.83), sfruttando la definizione di funzione residua ed avendo imposto la (3.88), si ottiene

$$\int_0^L \Phi(x)(-EJy_{xx} - m)dx = 0 \quad (3.89)$$

dove le funzioni di forma andranno opportunamente scelte così da rispettare le condizioni al contorno.

### 3.5.2 Metodo di integrazione di Cavalieri-Simpson

In analisi numerica, la regola di Simpson è un metodo di integrazione numerica, l'approssimazione numerica degli integrali definiti. Nello specifico, questa è rappresentata nella seguente approssimazione:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (3.90)$$

per punti posti ad egual distanza. La regola di Simpson corrisponde anche alla regola della quadratura per tre punti di Newton-Cotes.

### 3.5.3 Metodo di Runge-Kutta

In analisi numerica i metodi di Runge-Kutta sono un'importante famiglia di metodi iterativi impliciti ed espliciti per l'approssimazione delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie. Queste tecniche furono sviluppate intorno al 1900 dai matematici tedeschi Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta.

I metodi di Runge-Kutta (spesso abbreviati con "RK") sono una famiglia di metodi iterativi discreti utilizzati nell'approssimazione numerica di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie (ODE), e più specificatamente per problemi ai valori iniziali. Fanno parte della famiglia più generale di metodi discreti per le equazioni differenziali ordinarie, ovvero di quella classe di metodi numerici che fornisce un'approssimazione della soluzione di un'equazione differenziale (o più precisamente di un problema di Cauchy) in un insieme discreto di punti.

Per trovare un'un'approssimazione della funzione  $y(t) : R \rightarrow R^d$  che verifichi il generico problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

in un insieme discreto di punti in cui si considera il problema (solitamente nell'intervallo  $[t_0, t_f]$ ), si considera un campionamento dell'intervallo  $\Delta$  in un insieme di punti  $\{t_i | i = 0 \dots n\}$ , dove  $t_i = t_0 + ih$  e  $h = (t_f - t_0)/n$ . Il metodo numerico fornisce allora l'approssimazione dei valori  $y(t_j)$ , e per ottenere una ricostruzione abbastanza fedele della funzione il numero  $n$  deve essere sufficientemente elevato.

#### Metodo esplicito

Dato il problema ai valori iniziali:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.91)$$

dove i valori di  $t_0$  e  $y_0$  sono noti, si consideri un intervallo sufficientemente piccolo  $h > 0$  e si definiscano:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned} \quad (3.92)$$



per  $n = 1, 2, 3, \dots$ . In questo modo  $y(t_{n+1})$  è approssimato con  $y_{n+1}$ , e  $y_{n+1}$  è determinato da  $y_n$  più la media pesata di quattro incrementi  $k_1, k_2, k_3, k_4$ :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= f(t_n + h, y_n + h k_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.93}$$

dove ogni incremento è il prodotto di  $h$  e una stima della pendenza di  $f$ . Nello specifico:

- $k_1$  è l'incremento basato sulla pendenza all'inizio dell'intervallo, utilizzando  $\dot{y}$  (metodo di Eulero)
- $k_2$  è l'incremento basato sulla pendenza alla metà dell'intervallo, utilizzando  $\dot{y} + \frac{h}{2}k_1$
- $k_3$  è un altro incremento basato sulla pendenza alla metà dell'intervallo, utilizzando  $\dot{y} + \frac{h}{2}k_2$
- $k_4$  è l'incremento basato sulla pendenza alla fine dell'intervallo, utilizzando  $\dot{y} + hk_3$

Nel fare la media, gli incrementi valutati in un punto intermedio dell'intervallo hanno peso maggiore, ed i coefficienti sono scelti in modo che se  $f$  è indipendente da  $y$ , sicché l'equazione dipende da un semplice integrale, allora il metodo RK coincide con la regola di Cavalieri-Simpson.

# Capitolo 4

## Conclusioni

Lo scopo per il quale si è deciso di utilizzare Mathematica è quello di potersi ricavare in forma simbolica le matrici che compongono il sistema di equazioni, in particolare le matrici di massa, rigidità, smorzamento e dei carichi aerodinamici. In questo modo, quando si affronterà la risoluzione del sistema in forma numerica (tramite linguaggio Python, oggetto di tesi di laurea), avendo le matrici scritte in funzione di parametri simbolici, il tutto si riduce ad un problema quasi puramente algebrico, con un forte risparmio nei tempi di calcolo dell'algoritmo.

Inoltre, una volta impostata la meccanica del problema, sarà possibile ricavare, abbastanza facilmente, l'output relativo al moto della struttura, in modo da poterlo confrontare con i risultati che si otterranno successivamente in forma numerica con l'implementazione in Python. L'uso di Mathematica, quindi, è risultato di estrema comodità, non solo per estrapolare le matrici che compongono il sistema in forma simbolica, ma anche per confrontare gli output con il modello numerico, e tarare quest'ultimo in funzione della precisione che si vuole ottenere.